D'aquí es deduceix la regla següent: Per a obtenir R cal només multiplicar r pel valor absolut de la dilatació corresponent.

2. Representació conforme d'un cercle en un altre

Suposem que a punt O_z d'un dels cercles C, correspòn el centre O_w en l'altre (fig. 1). Pendrem els centres com a origens en llurs plans respectius. L'eix d'abscisses en el pla

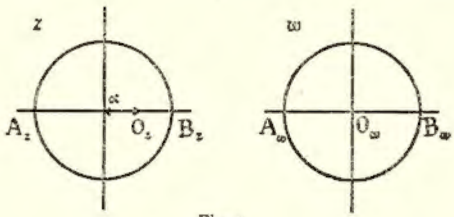

Fig. 1

de les z determina el diàmetre A_z B_z. Sigui α la distancia de O_z a l'origen. Es sabut que la funció linial estableix la correspondencia conforme entre cercles. Com que té tres paràmetres, anem a determinar-la imposant-li, apart de la condició d'ésser O_z i O_w conjugats, la de ser-ho A_z i A_w així com B_z i B_w. Es fàcil veure com la homografía

$$w = \frac{z-\alpha}{1-z\alpha}$$

compleix les condicions exigides. Determinant $\frac{dw}{dz}$ i fent $z=\alpha$ resulta com a valor del radi en O_z

$$\rho = \frac{1}{\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\alpha}} = 1-\alpha^2$$

3. Transformació d'un semiplà en un cercle

Considerant el semiplà com un cercle, es veu que la homografía convé perfectament a la transformació. Sigui O_z l'origen a una distancia α del límit del semiplà, A_z el peu de la distancia de O_z al límit esmentat. La transformació

$$w = \frac{z}{z + 2\alpha}$$

fa correspondre al punt O_z el punt O_w, centre de C al A_z el A_w i al punt de l'infinit en el pla z el punt B_w diametralment oposat al A_w i situat com ell en l'eix d'abscisses.

El radi per a O_z es calcula fàcilment, obtenint-se:

$$r = 2\alpha$$

4. Transformacions d'angles formats per rectes o cercles

Sigui un angle d'obertura $h\pi$, i en ell un punt O_z que tingui per coordenades polars R i φ. La transformació

$$w = z^{\frac{1}{h}}$$

transforma l'angle en semiplà. El mòdul de O_z es converteix en $R^{\frac{1}{h}}$ i l'argument en $\frac{\varphi}{h}$. Del semiplà es passa ja fàcilment al cercle. Amb la notació del cas anterior, si es vol que O_z es transformi en el centre, s'haurà de posar

$$\alpha = R^{\frac{1}{h}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{h}$$

Per al càlcul del radi podem aplicar la propietat general 2.ª demostrada abans i que hem traduit en una regla:

$$\rho = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w = R^{1/h}} 2\alpha = 2hR \operatorname{se} \frac{\varphi}{h}.$$

Si l'angle hagués estat un quadrant,

$$h=\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \rho=\text{R sen } 2\varphi.$$

El segment o lúnula que representen les figures 2 i 3, en els quals la corda situada sobre l'eix d'abscisses val la unitat es transformen fàcilment en angles mitjançant

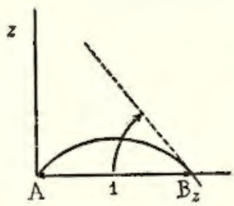

Fig. 2

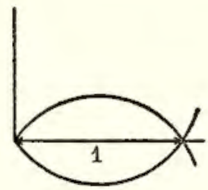

Fig. 3

la inversió amb potencia 1. Per consegüent és fàcil trobar les funcions definitives de representació sobre C, així com els radis.

El semicercle de radi 1 es pot transformar també fàcilment en un quadrant mitjançant la inversió amb potencia 2:

$$w=\frac{2}{z}.$$

Del quadrant es passa fàcilment a C. Per a fixar la posició del transformat O′ del punt O (fig. 4) definit per la seva distancia α al centre D i per equidistar dels extrems A i E del diàmetre que limita el semicercle, considerem aquell punt O com a intersecció de la recta OD i de la circumferencia EOA. A la recta correspòn per inversió el cercle de radi 1 que té per centre A′ transformat de A i situat a la distancia 1 del nou origen.

Per altra part, la transformada de la circumferencia serà una recta que farà amb l'eix d'abscisses el mateix angle φ que la tangent a la citada circumferencia forma amb l'eix d'abscisses en A. Ultra això aquesta recta passa

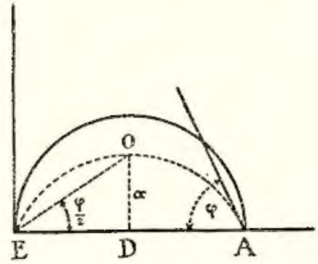

Fig.

evidentement per A'. Recordant el valor del radi per a un quadrant, s'obté

$$\rho_c = R \operatorname{sen} 2\varphi$$

I per tant, tenint esment que $\alpha = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, resulta

$$\rho_c = \frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}$$

I per al radi del semicercle

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{2}. \quad \rho_c = \frac{2\alpha(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2}$$

Un sector de cercle qualsevulga es pot transformar, primer en semicercle i després en C.

5. Representació conforme de recintes amb talls

Sigui ara la representació conforme d'un pla proveit d'un tall (fig. 5), i cerquem el radi per a un punt O que dista α del vèrtex del tall isituat en la seva prolongació. Mitjançant la funció

$$w=\sqrt{z}$$

es passa del pla sencer al semiplà. El punt O′ transfor-

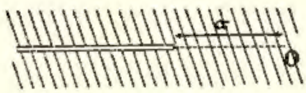

Fig. 5

mat del O queda a una distancia $\sqrt{\alpha}$ del límit del semiplà. D'aquest es passa fàcilment a C. Resulta per a valor del radi

$$\rho=4\alpha$$

Si el punt O estés definit per les seves coordonades polars z i φ referides al tall com a eix polar i al seu vèrtex com a pol, es tindría

$$\rho=4r \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$$

Considerem el cas del cercle de radi I amb un tall AB (fig. 6), el vèrtex del qual dista α de l'origen. Es trans-

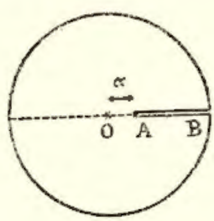

Fig. 6

formarà primer el cercle anterior en un altre del que el tall s'allargui per tot el radi mitjançant una senzilla homografía. De la nova figura es passa fàcilment a un semicercle. Heus-aquí les dues transformacions

$$z' = \frac{z-\alpha}{1-z\alpha}$$

$$w = \sqrt{z'}$$

El radi per al centre és

$$\rho = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$$

6. Representació conforme sobre C d'alguns recintes de dues fulles

En primer lloc sigui el pla de dues fulles una de les quals té un tall rectilini al llarg d'una semirrecta traçada pel punt de ramificació. Pendrem aquesta com a semieix $+x$. Amb la transformació

$$w = \sqrt[4]{z}$$

es passa al semiplà d'una fulla. Un punt A de coordenades polars r i φ passa a tenir les coordenades $\sqrt[4]{r}$ i $\frac{\varphi}{4}$. El radi en el mateix val

$$\rho = 8r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{4}.$$

El cercle de dues fulles, essent el centre el seu punt de ramificació, es converteix en el cercle ordinari mitjançant

$$w = \sqrt{z}.$$

Un punt que disti α del centre del cercle primitiu dista $\sqrt{\alpha}$ del centre del transformat. El radi corresponent val

$$\rho = 2\sqrt{\alpha}(1-\alpha).$$

Si el punt de ramificació no és el centre sinó que en dista α, es redueix al cas anterior mitjançant la coneguda homografía:

$$z' = \frac{z-\alpha}{1-z\alpha}.$$

Per al centre del doble cercle s'obté en aquest cas el radi

$$\rho = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}.$$

7. Exemple de representació conforme obtinguda mitjançant una funció trascendent

Consideri 's l'exponencial

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

que transforma l'espai comprès entre les dues paral·leles $y = \pm\frac{\pi}{2}$ en un semiplà. L'origen no es transforma en el nou origen sinó en el punt de l'eix real situat a la distancia 1 de l'origen, el qual és el transformat del punt de l'infinit.

Del semiplà es passa a C per la transformació sabuda. El radi en l'origen del pla de les z val

$$\rho = 2$$

Si la distancia entre les paral·leles dades suposades simètriques respecte de l'eix x hagués estat k, el resultat fóra

$$\rho = 2\frac{k}{\pi}.$$

CONFERENCIA III